$M \in R\text{-mod}$

Cat. Λ_M : (R^n, α) , $\alpha : R^n \to M$

$$
\begin{tikzcd}
R^m \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & R^n \arrow[d, "\alpha"] \\
& M
\end{tikzcd}
$$

(R^n, α) (R^m, β)

$\rightsquigarrow$

$(R^n \oplus R^m, \alpha + \beta)$

$F : \Lambda_M \to R\text{-mod}$ functor de esq.

$(R^n, \alpha) \longrightarrow R^n$

Prop: $\varinjlim_{\Lambda_M} F = M$.

NB: Dado $(R^n, \alpha) \in \Lambda_M$ e $y \in R^n$

tq. $\alpha y = 0 \Rightarrow \varphi(R^n, \alpha) y = 0$

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\psi = 0"] \arrow[drrr, bend right, "0"'] & R \arrow[r, "\varphi_y"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "L(\mathbb{R}^n, \alpha)"] \arrow[dr, "\alpha"] & \varinjlim F \arrow[d, "\theta"] \\
 & & & M
\end{tikzcd}
$$

$$\therefore \quad L(\mathbb{R}^n, \alpha)\, y = L(\mathbb{R}^n, \alpha)\, \varphi_y \circ \psi(1) = 0$$

<u>Dem</u>: Por def. de $\varinjlim$, temos

$$\theta : \varinjlim_{\Lambda_M} F \longrightarrow M$$

tq. $\theta\, L(\mathbb{R}^n, \alpha)\, y = \alpha(y)$

1. <u>θ é sobrejetivo</u>: $x \in M \to \alpha : R \to M$

tq. $\alpha(1) = x$

$$\therefore \quad x = \theta \circ L(R, \alpha)(1)$$

2. $\underline{\Theta \text{ é } 1\text{-}1}$: seja $y \in \underrightarrow{\lim} F$ t.q.

$\Theta y = 0$

Temos p.SPG: $\exists (\mathbb{R}^n, \alpha) \in \Delta_M$ t.q.

$$y = L(\mathbb{R}^n, \alpha) y', \quad y' \in \mathbb{R}^n$$

então $0 = \Theta y = \alpha \circ L(\mathbb{R}^n, \alpha) y' = \alpha(y')$

$\therefore \quad L_{\mathbb{R}^n, \alpha} y' = 0$

$\boxtimes$

Teorema: ASASE:

(1) M é plano

(2) $\theta: \mathrm{Hom}_R(P,R)\otimes M \to \mathrm{Hom}_R(P,M)$

é sobrejectivo para P f.g.

(3) Se P e f.g. e $\beta: P \to M$ é morfismo, $\exists$ factorização $\beta: P \xrightarrow{\gamma} R^{n} \xrightarrow{\alpha} M$

(4) Dado $\alpha: R^n \to M$ tq. $y_1, \dots, y_k \in \ker\alpha$

$\exists$ fact. $\alpha: R^n \xrightarrow{\varphi} R^m \to M$ tq.

$\varphi y_i = 0 \ \forall i$

(5) Dados $R^r \xrightarrow{f} R^m \xrightarrow{\alpha} M$ tq. $\alpha f = 0$

$\exists$ fat. $\alpha: R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \to M$ tq.

$\varphi f = 0$

(6) Λ_M é filtrada

(7) M é um limite filtrado de R-módulos livres de caract. finita.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2) ✓

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $\sum_i r_i \otimes m_i \in \theta^{-1}(\beta)$ e formamos $r = (r_1, \dots, r_n)$ e $\alpha : R^n \to M$ t.q. $\alpha(e_i) := m_i$

(3) $\Rightarrow$ (4) Seja $\alpha : R^n \to M$ e $y_1, \dots, y_k \in \operatorname{Ker} \alpha$

$P := R^n / \langle y_1, \dots, y_k \rangle_\alpha$ e consideramos

temos

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\kappa"] \arrow[rr, bend left] & P \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & M \\ & & R^m \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

$$\alpha = \beta \circ (\gamma \kappa)$$

e $\gamma \kappa y_i = 0$

(5) $\Rightarrow$ (6) dados

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathbb{R}^k \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

tq. $\beta\varphi = \beta\psi = \alpha \iff \beta \circ (\varphi - \psi) = 0$

(6) $\Rightarrow$ (7) ✓

(7) $\Rightarrow$ (1) limites filtrados de suc. exatas são exatos

$\square$

<u>Lema</u>: $M \in R$-mod é plano sse $\forall\, \mathfrak{a} \subset R$ ideal f.g. induz

$$\mathfrak{a} \otimes M \hookrightarrow R \otimes M = M$$

De forma equivalente, o produto de coef. $R \times M \to M$ induz um iso

$$\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\cong} \mathfrak{a}M \subset M$$

<u>Dem</u>: Se M é plano $\mathfrak{a} \otimes M \hookrightarrow R \otimes M$

Reciproc/, se $\mathfrak{a} \otimes M = \mathfrak{a}M$ $\forall \mathfrak{a}$ f.g.

Então se $x_1, \dots, x_n \in R$ e $m_1, \dots, m_n \in M$ são t.q.

$$\sum_i x_i m_i = 0$$

$$\iff \sum_i x_i \otimes m_i = 0$$

em $\mathfrak{a} \otimes M$ onde $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

$\Longrightarrow$

critério equacional para $\otimes$

$$\exists x_{ij} \in R \quad \exists m'_j \in M$$

tq.

1. $m_i = \sum_j x_{ij} m'_j \quad \forall i$

2. $\sum_i x_i x_{ij} = 0 \quad \forall j$

O resultado segue do exercício seguinte.

$\square$

Exercício: (critério equacional para ser plano)

$M \in R\text{-mod}$ é plano sse $\forall \sum_i x_i m_i = 0$

com $x_i \in R$, $m_i \in M$

$$\exists x_{ij} \in R \quad \exists m'_j \in M.$$

$$m_i = \sum_j x_{ij} m'_j \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} x_i = 0 \quad \forall j$$

O "truque do determinante"

<u>Def</u>: Dada $M \in M_{n\times n}(R)$ definimos o seu polinómio característico $P_M(T)$:
$= \det(TI_n - M) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n \in R[T]$, onde $I_n \in M_{n\times n}(R)$ é a matriz identidade.

<u>Teorema</u>: Seja $M \in R\text{-mod}$ e sejam $m_1, \dots, m_n \in M$ geradores. Seja $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ e seja $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(R)$ t.q.

$$\varphi(m_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} m_i .$$

Então

$$P_A(\varphi) = 0 .$$

Dem: Seja $\Delta = \left(\delta_{ij}\varphi - \mu_{a_{ji}}\right)_{ij}$

$$\in M_{n\times n}(\mathrm{End}_R(M))$$

onde $\mu_{a_{ji}} : M \longrightarrow M$; $m \longmapsto a_{ji} m$

Em particular Δ representa um homomorfismo de $M^n \longrightarrow M^n$

Seja $X = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_n \end{bmatrix} \in M^n$

Temos
$$\Delta X = \begin{bmatrix} \varphi m_1 - \sum_i a_{i1} m_i \\ \vdots \\ \varphi m_n - \sum_i a_{in} m_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seja Γ é a matriz dos cofatores de Δ transposta, então

$$M'\Delta X = \det \Delta I_n X = \det \Delta X$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \det \Delta m_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$

$\therefore \det \Delta = 0$ em $End_R(M)$

$\square$

<u>NB</u>: Utilizamos M f.g !

<u>Prop</u>: Seja $M \in R\text{-mod}$ é f.g. e $\mathfrak{a} \subset R$ é um ideal t.q. $\mathfrak{a}M = M$, então $\exists\, a \in \mathfrak{a}$ t.q.

$$(1+a)M = 0.$$

Mnemónica: $\mathfrak{A}M = M \Leftrightarrow aM = M$ para algum $a \in \mathfrak{A}$.

Dem: A igualdade

$$\mathfrak{A}M = M$$

$\Rightarrow \varphi = 1_M \in \mathrm{End}_R(M)$ tem matriz com coef. em $\mathfrak{A}$. Logo satisfaz uma equação

$$\varphi^n + c_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

com $a_i \in \mathfrak{A}^i$. Fazendo $a = a_1 + \cdots + a_n$ vem

$$(1+a)m = 0 \quad \forall m \in M.$$

$\square$

Cor: Se $M \in R$-mod é f.g. e $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ é sobrejectivo, então φ é iso.

$\square$

<u>Dem.</u>: Em geral M tem estrutura de $R[x]$-módulo dada por φ:

$$x \cdot m := \varphi m$$

Se φ é sobrejetivo, então dado $I = \langle x \rangle \subset R[x]$, temos

$$IM = M$$

$$\Rightarrow \exists\, G(x) \in R[x] \text{ t.q.}$$

$$(1 + G(x)x)M = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + G(\varphi)\varphi)m = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow m + G(\varphi)\varphi m = 0$$

Logo $\varphi m = 0 \Rightarrow m = 0$ $\square$

Cor: Sejam $n, m \in \mathbb{N}$

(1) $v_1, \dots, v_n \in R^n$ tq. $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = R^n \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base

(2) $R^m \simeq R^n \Rightarrow n = m$

Lema de Nakayama: $M \in R$-mod f.g. e $\mathfrak{m} \subset \mathrm{rad}(M)$. Então $\mathfrak{m}M = M \Rightarrow M = 0$.

Dem: $\mathfrak{m}M = M \Rightarrow \exists\, a \in \mathfrak{m}$ tq.

$$(1+a)M = 0$$

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{I} \subset R: \\ \mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{I} \\ \mathfrak{I} \text{ é maximal}}} \mathfrak{I}$$

Seja $\kappa : R \to R/\mathrm{Ann}(M)$. Então

κ envia red M em $\mathrm{red}(R/\mathrm{Ann}(M))$

Se $a \in m \subset \mathrm{red}(M)$, então

$$\kappa(1+a) = 1 + \kappa(a) \in (R/\mathrm{Ann}(M))^{\times}$$

logo $(1+a)M = 0 \Rightarrow M = 0$

$\square$

<u>NB</u>: Se M não for f.g. o resultado não é válido: se R é domínio local com ideal maximal $m \neq 0$, então $\mathrm{Frac}(R)$ é um R-módulo t.q.

$$m\,\mathrm{Frac}(R) = \mathrm{Frac}(R)$$

mas $\mathrm{Frac}(R) \neq 0$.

<u>Prop</u>: $M \in R\text{-mod}$ $N \subset M$ submódulo $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} M$. Então

(1) Se M é f.g. e $M = \mathfrak{m}M + N$, então $M = N$.

(2) Se M é f.g. e $m_1, \ldots, m_n \in M$ então $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle = M$ sse

$$\langle \kappa(m_1), \ldots, \kappa(m_n) \rangle = M/\mathfrak{m}M$$

onde $\kappa : M \to M/\mathfrak{m}M$ é hom. can.

<u>Dem</u>: (1) $\Rightarrow$ (2)

(2) segue de (1) com $N = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$

(1) $M = \mathfrak{m}M + N \iff$

$$\frac{M}{N} = \mathfrak{m}\frac{M}{N}$$

$\square$