

$M \in R\text{-mod}$

Cl. $\Delta_M : (R^n, \alpha) , \alpha : R^n \rightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} R^m & \xrightarrow{\varphi} & R^n \\ \beta \searrow & \downarrow & \swarrow \alpha \\ & M & \end{array}$$

$$(R^n, \alpha) \quad (R^m, \beta)$$

$$\downarrow \\ (R^n \oplus R^m, \alpha + \beta)$$

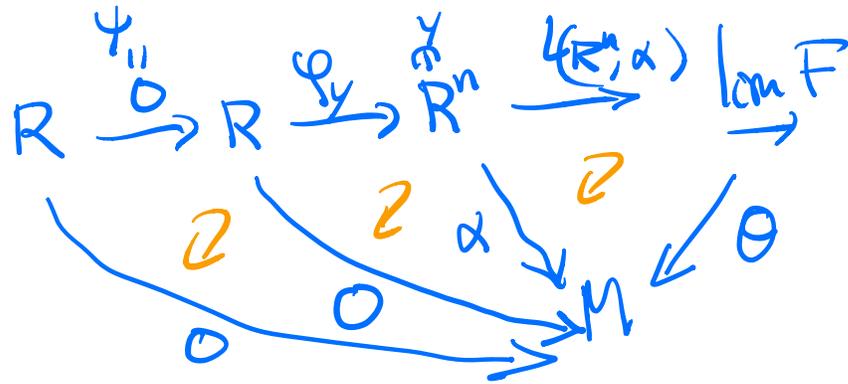
$F: \Delta_M \rightarrow R\text{-mod}$ functor de esq.

$$(R^n, \alpha) \rightarrow R^n$$

Prop: $\varinjlim_{\Delta_M} F = M$.

NB: Dado $(R^n, \alpha) \in \Delta_M$ e $y \in R^n$

tg. $\alpha y = 0 \Rightarrow \varphi_{(R^n, \alpha)} y = 0$



$$\therefore L(R^n, \alpha)y = L(R^n, \alpha)\psi \cdot \psi^{-1}(y) = 0$$

Dem: Por def. de \varprojlim , temos

$$\theta: \varprojlim_{\mathcal{I}_M} F \rightarrow M$$

tg. $\theta L(R^n, \alpha)y = \alpha(y)$

1. θ é sobrejetivo: $x \in M \rightarrow \alpha: R \rightarrow M$

tg. $\alpha(1) = x$

$$\therefore x = \theta \cdot L(R^n, \alpha)(1)$$

2. Θ é 1-1 : seja $y \in \text{ker } F$ t-1.

$$\Theta y = 0$$

Temos : sgo $\exists (\mathbb{R}^n, \alpha) \in \Delta_M$ t-1.

$$y = L(\mathbb{R}^n, \alpha) y', \quad y' \in \mathbb{R}^n$$

então $0 = \Theta y = \alpha \circ L(\mathbb{R}^n, \alpha) y' = \alpha(y')$

$$\therefore L_{\mathbb{R}^n, \alpha} y' = 0$$



Teorema: ASASE:

(1) M é plano

(2) $\Theta: \text{Hom}_R(P, R) \otimes M \rightarrow \text{Hom}_R(P, M)$

é sobrejetivo para P f.a.

(3) Se P é f.a. e $\beta: P \rightarrow M$ é morfismo, \exists fatoração $\beta: P \xrightarrow{\gamma} R^n \xrightarrow{\alpha} M$

(4) Dado $\alpha: R^n \rightarrow M$ t.g. $y_1, \dots, y_n \in \ker \alpha$

\exists fact. $\alpha: R^n \xrightarrow{\varphi} R^m \rightarrow M$ t.g.

$\varphi y_i = 0 \forall i$

(5) Dados $R^r \xrightarrow{\varphi} R^m \xrightarrow{\alpha} M$ t.g. $\alpha \varphi = 0$

\exists fact. $\alpha: R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \rightarrow M$ t.g.

$\varphi \varphi = 0$

(6) Δ_M é filtrado

(7) M é um limite filtrado de R -módulos livres de carat. finita.

Dem: (1) \Rightarrow (2) ✓

(2) \Rightarrow (3) Seja $\sum_i x_i \otimes m_i \in \Theta^{-1}(\beta)$

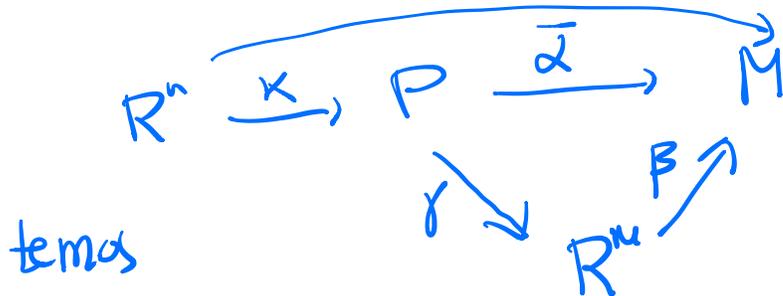
e formemos $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e

$\alpha: R^n \rightarrow M$ t.q. $\alpha(e_i) := m_i$

(3) \Rightarrow (4) Seja $\alpha: R^n \rightarrow M$ e

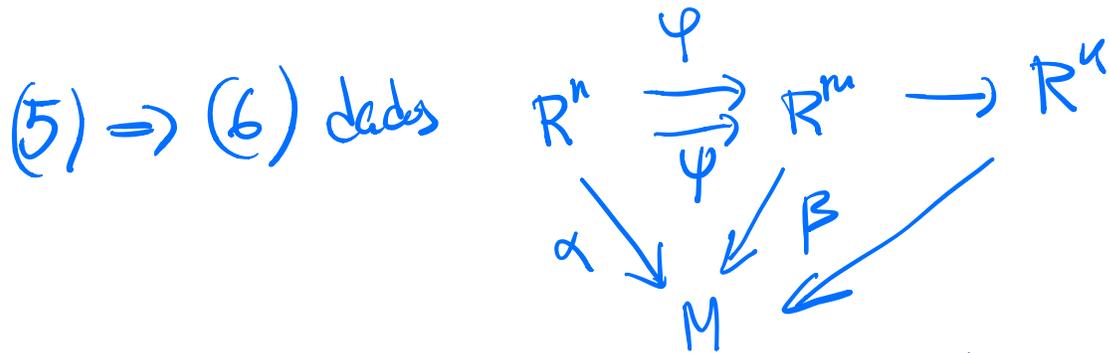
$y_1, \dots, y_k \in \text{Ker } \alpha$

$P := R^n / \langle y_1, \dots, y_k \rangle_\alpha$ e consideremos



$$\alpha = \beta \circ (\gamma_k)$$

$$\text{e } \gamma_k y_i = 0$$



$$\text{tg. } \beta \gamma = \beta \psi = \alpha \Leftrightarrow \beta \circ (\gamma - \psi) = 0$$

$$(6) \Rightarrow (7) \quad \checkmark$$

(7) \Rightarrow (1) limites filtrados de
seq. exatas são exatas



Lemma: M é R -mod é plano sse

$\forall \mathfrak{A} \subset R$ ideal f.g. induz

$$\mathfrak{A} \otimes M \hookrightarrow R \otimes M = M$$

De forma equivalente, o produto de coef. $R \times M \rightarrow M$ induz um iso

$$\mathfrak{A} \otimes M \xrightarrow{\cong} \mathfrak{A}M \subset M$$

Dem: Se M é plano $\mathfrak{A} \otimes M \hookrightarrow R \otimes M$

Recíproco/, se $\mathfrak{A} \otimes M = \mathfrak{A}M \quad \forall \mathfrak{A}$ f.g.

Então se $x_1, \dots, x_n \in R$ e $m_1, \dots, m_n \in M$ são t.g.

$$\sum_i x_i m_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_i x_i \otimes m_i = 0$$

em $\mathfrak{A} \otimes M$ onde $\mathfrak{A} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

\Rightarrow
critério
equacional
para \otimes

$$\exists x_{ij} \in \mathbb{R} \quad \exists m_i \in M$$

tg.

$$1. m_i = \sum_j x_{ij} m_j \quad \forall i$$

$$2. \sum_i x_{ij} x_{ij} = 0 \quad \forall j$$

O resultado segue do exercício seguinte:

Exercício: (critério equacional para ser plano) □

$M \in R\text{-mod}$ é plano se $\forall \sum_i x_i m_i = 0$

com $x_i \in \mathbb{R}$, $m_i \in M$

$$\exists x_{ij} \in \mathbb{R} \quad \exists m'_i \in M.$$

$$m_i = \sum_j x_{ij} m'_j \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} x_{ij} = 0 \quad \forall j$$

O "troque do determinante"

Def. Dado $M \in M_{n \times n}(R)$ definimos o seu polinómio característico $P_M(T)$:
$$= \det(TI_n - M) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n \in R[T],$$
 onde $I_n \in M_{n \times n}(R)$ é a matriz identidade.

Teorema: Seja M R -mod e sejam $m_1, \dots, m_n \in M$ geradores. Seja $\varphi \in \text{End}_R(M)$ e seja $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(R)$ t.s.
$$\varphi(m_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} m_i.$$

Então

$$P_A(\varphi) = 0.$$

Dem: Seja $\Delta = (\delta_{ij}\varphi - \mu_{aji})_{ij}$

$$\in M_{n \times n}(\text{End}_R(M))$$

onde $\mu_{aji} : M \rightarrow M ; m \mapsto a_{ji}m$

Em particular Δ representa um homomorfismo de $M^n \rightarrow M^n$

$$\text{Seja } X = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \in M^n$$

$$\begin{aligned} \text{Temos } \Delta X &= \begin{bmatrix} \varphi m_n - \sum_i a_{in} m_i \\ \vdots \\ \varphi m_n - \sum_i a_{in} m_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Seja Γ a matriz dos cofatores de Δ transposta, então

$$\Gamma \Delta X = \det \Delta I_n X = \det \Delta X \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det \Delta m_i = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$\therefore \det \Delta = 0 \quad \text{em } \text{End}_{\mathbb{R}}(M)$$

□

NB: Utilizemos M f - g !

Prop: Seja $M \in R\text{-mod}$ e f - g e $\mathcal{A} \subset R$ é um ideal t.g. $\mathcal{A}M = M$,
então $\exists a \in \mathcal{A}$ t.g.

$$(1 + \underline{a})M = 0.$$

Memoranda : $\mathbb{R}M = M \Leftrightarrow aM = M$
para algum $a \in \mathbb{R}$.

Dem: A igualdade
 $\mathbb{R}M = M$

$\Rightarrow \varphi = 1_M \in \text{End}_{\mathbb{R}}(M)$ tem matriz
com coef. em \mathbb{R} . Logo satisfaz uma
equação

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

com $a_i \in \mathbb{R}$. Fazendo $a = a_1 + \dots + a_n$

vem $(1+a)m = 0 \quad \forall m \in M.$

□

Cor: Se $M \in \mathbb{R}\text{-mod}$ é f.g. e $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(M)$
é sobrejetivo, então φ é iso.

□

Dem.: Em geral M tem estrutura de $R[X]$ -módulo dada por φ :

$$X \cdot m := \varphi m$$

Se φ é sobrejetivo, então dado $\Omega = \langle X \rangle \subset R[X]$, temos

$$\Omega M = M$$

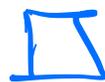
$\Rightarrow \exists G(X) \in R[X] \neq 0$.

$$(1 + G(X)X)M = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + G(\varphi)\varphi)m = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow m + G(\varphi)\varphi m = 0$$

$$\text{logo } \varphi m = 0 \Rightarrow m = 0$$



Cor: Sejam $n, m \in \mathbb{N}$

(1) $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in R^n$ t.g. $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle = R^n \Rightarrow \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é uma base

(2) $R^m \cong R^n \Rightarrow n=m$

Lema de Nakayama: $M \in R\text{-mod}$ f.g. e $\mathfrak{m} \in \text{rad}(R)$. Então $\mathfrak{m}M = M \Rightarrow M = 0$.

Dem: $\mathfrak{m}M = M \Rightarrow \exists a \in \mathfrak{m}$

t.g. $(1+a)M = 0$

$\text{rad}(R) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \in R \\ \mathfrak{A} \in R: \\ \text{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \text{ é maximal}}} \mathfrak{A}$

Seja $\kappa: R \rightarrow R/\text{Ann}(M)$. Então
 κ envia $\text{red} M$ em $\text{red}(R/\text{Ann}(M))$

Se $a \in m \subset \text{red}(M)$, então

$$\kappa(1+a) = 1 + \kappa(a) \in (R/\text{Ann}(M))^{\times}$$

Logo $(1+a)M = 0 \Rightarrow M = 0$

□

NB: Se M não for f.g. o resultado
não é válido: se R é domínio local
com ideal maximal $m \neq 0$, então $\text{Frac}(R)$
é um R -módulo t.g.

$$m\text{Frac}(R) = \text{Frac}(R)$$

mas $\text{Frac}(R) \neq 0$.

Prop: M é R -mód e $N \subset M$ submódulo
 $m \in \text{rad } M$. Então

(1) Se M é f.g. e $M = mM + N$,
então $M = N$.

(2) Se M é f.g. e $m_1, \dots, m_n \in M$
então $\langle m_1, \dots, m_n \rangle = M$ se e
 $\langle k(m_1), \dots, k(m_n) \rangle = M/mM$

onde $k: M \rightarrow M/mM$ é hom. can.

Dem: (1) \Rightarrow (2)

(2) segue de (1) com $N = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$

$$(1) \quad M = mM + N \quad (\Leftrightarrow) \\ \frac{M}{N} = m \frac{M}{N}$$

□